Prova Scritta 24 Giugno 2011

Compito 1

1) Sono dati due vettori uguali in modulo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e formanti un certo angolo θ_{ab}. Calcolare $m = \|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$ sapendo che il modulo della loro somma vale 6 ed il modulo della loro differenza vale 8.

Soluzione

Utilizzando le proprietà del prodotto scalare: s con $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = m > 0$:

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 2m^2(1+\cos\theta_{ab}) = s^2$ e $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 2m^2(1-\cos\theta_{ab}) = d^2$ che, sommate membro a membro danno: $4m^2 = s^2 + d^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow m^2 = \frac{100}{4} = 25 \Rightarrow m = 5$.

Oppure, ragionando per via geometrica, si può notare che, costruendo con la regola del parallelogramma la somma e la differenza di due vettori uguali in modulo, si forma un rombo i cui lati sono i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e le diagonali sono $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$. Le diagonali di un rombo sono perpendicolari fra di loro e dividono in rombo in 4 triangoli equilateri uguali. Ciascun triangolo equilatero ha l'ipotenusa uguale ad m ed ha i due cateti uguali a $s/2$ e $d/2$. Quindi, per il teorema di Pitagora: $m^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow s^2 + d^2 = 4m^2$ che è il risultato ottenuto mediante il metodo precedente.

2) Un'auto si muove di moto uniforme in un circuito circolare con una velocità istantanea pari a $v = 100\,km/h$. Sapendo che il modulo dell'accelerazione dell'auto è $\|\vec{a}\| = 2\,m/s^2$ determinare la lunghezza del circuito. Esprimere il risultato in metri ed in chilometri.

Soluzione

L'auto si muove di moto uniforme (quindi con velocità costante in modulo). Il circuito è circolare quindi vi è un'accelerazione centripeta di modulo pari a $\|\vec{a}\|$ tale che $\frac{v^2}{R} = \|\vec{a}\|$ dove R è il raggio del circuito. Quindi la lunghezza del circuito sarà $l = 2\pi R = 2\pi\frac{v^2}{\|\vec{a}\|} \simeq 0.24\cdot10^4\,m = 2.4\,km$.

3) La legge oraria di un punto materiale è data da $s(t) = a\,t^2 + (2\,s)\,a\,t$.

Determinare a essendo $v(6\,s) = 42\,m/s$.

Soluzione

La velocità in funzione del tempo è $v(t) = 2\,a\,t + (2\,s)\,a$. All'istante $t = 6\,s$ vale la relazione:

$$v(6\,s) = 12\,a\,s + 2\,s\,a = 14\,a\,s = 42\frac{m}{s} \Rightarrow a = \frac{42}{14}\frac{m}{s^2} = 3\frac{m}{s^2} .$$

---

4) Un punto materiale si trova, inizialmente fermo, su un piano inclinato rispetto al suolo di un angolo $\alpha = 30^\circ$ ad una quota $h = 2\,m$ da terra. Determinare la velocità del corpo quando arriva a terra ($h = 0\,m$) ipotizzando che tutti gli attriti siano trascurabili. Esprimere il risultato in chilometri all'ora (km/h).

Soluzione

L'energia meccanica totale del punto si conserva durante il moto:

$$E = cost = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f \ .$$

All'istante iniziale $v_i = 0$ quindi:

$$mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = mg(h_i - h_f) \Rightarrow v_f = \sqrt{2g(h_i - h_f)} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 2}\,\frac{m}{s} \simeq 22.6\,km/h \ .$$

---

5) Un corpo puntiforme di massa $M = 10^{-2}\,kg$ é appoggiato ad un piano orizzontale perfettamente liscio. Il corpo è vincolato ad un punto del piano da un cavo inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza $L = 1\,m$. Determinare la tensione del cavo se il corpo ruota intorno al punto P compiendo 1 giro al secondo. Esprimere il risultato in newton (N).

Soluzione

Il corpo si muove di moto circolare uniforme intorno al punto P. L'accelerazione centripeta è determinata dall'unica forza centripeta in gioco (la tensione del cavo). La relazione fra accelerazione centripeta e forza centripeta è data dal secondo principio della dinamica. Il modulo dell'accelerazione centripeta è $a_c = \omega^2 L$ dove ω è la velocità angolare del corpo ed è data da $\omega = \frac{2\pi}{1\,s}$. Quindi: $T = Ma_c = 10^{-2}\,kg\left(\frac{2\pi}{1\,s}\right)^2 1\,m \simeq 3.95 \cdot 10^{-1}\,N$.

Costanti: $g = 9.81\, m/s^2$, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\, N\, m^2\, kg^{-2}$, $M_T = 5.971 \cdot 10^{24}\, kg$, $R_T = 6.37 \cdot 10^6\, m$, $M_L = 7.35 \cdot 10^{22}\, kg$, $R_L = 1738\, km$.